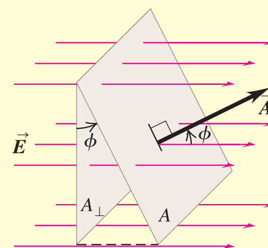
CAPÍTULO 22 RESUMEN

Flujo eléctrico: El flujo eléctrico es una medida del "flujo" del campo eléctrico a través de una superficie. Es igual al producto de un elemento de área por la componente perpendicular de $\vec{E}$, integrada sobre una superficie. (Véanse los ejemplos 22.1 a 22.3.)

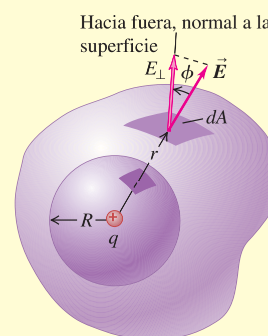
$$\Phi_E = \int E\cos\phi\, dA$$
$$= \int E_\perp\, dA = \int \vec{E}\cdot d\vec{A} \qquad (22.5)$$



Ley de Gauss: La ley de Gauss establece que el flujo eléctrico total a través de una superficie cerrada, que se escribe como la integral de superficie de la componente de $\vec{E}$, que es normal a la superficie, es igual a una constante por la carga total Q_{enc} encerrada por la superficie. La ley de Gauss es un equivalente lógico de la ley de Coulomb, pero su uso simplifica mucho los problemas con un alto grado de simetría. (Véanse los ejemplos 22.4 a 22.10.)

Cuando se coloca carga en exceso en un conductor en reposo, ésta permanece toda en la superficie, y $\vec{E} = \mathbf{0}$ en todos los puntos del material del conductor. (Véanse los ejemplos 22.11 a 22.13.)

$$\Phi_E = \oint E\cos\phi\, dA$$
$$= \oint E_\perp\, dA = \oint \vec{E}\cdot d\vec{A}$$
$$= \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \qquad (22.8),\ (22.9)$$



Campo eléctrico de varias distribuciones simétricas de carga: En la siguiente tabla se listan los campos eléctricos generados por varias distribuciones simétricas de carga. En la tabla, q, Q, λ y σ se refieren a las *magnitudes* de las cantidades.

Distribución de la carga	Punto en el campo eléctrico	Magnitud del campo eléctrico
Una sola carga puntual	Distancia r desde q	$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}$
Carga q en la superficie de una esfera conductora de radio R	Esfera exterior, $r > R$	$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}$
	Esfera interior, $r < R$	$E = 0$
Alambre infinito, carga por unidad de longitud λ	Distancia r desde el alambre	$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{r}$
Cilindro conductor infinito con radio R, carga por unidad de longitud λ	Cilindro exterior, $r > R$	$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{r}$
	Cilindro interior, $r < R$	$E = 0$
Esfera aislante sólida con radio R, carga Q distribuida de manera uniforme en todo el volumen	Esfera exterior, $r > R$	$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}$
	Esfera interior, $r < R$	$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qr}{R^3}$
Placa infinita cargada con carga uniforme por unidad de área σ	Cualquier punto	$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$
Dos placas conductoras con cargas opuestas con densidades superficiales de carga $+\sigma$ y $-\sigma$	Cualquier punto entre las placas	$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$

Términos clave

superficie cerrada, *751*
flujo eléctrico, *752*
integral de superficie, *755*
ley de Gauss, *757*
superficie gaussiana, *759*
experimento de la hielera de Faraday, *768*

Respuesta a la pregunta de inicio de capítulo ?

No. El campo eléctrico dentro de una cavidad interior de un conductor es igual a cero, por lo que no hay ningún efecto eléctrico en la niña. (Véase la sección 22.5.)

Respuestas a las preguntas de Evalúe su comprensión

22.1 Respuesta: iii) Cada elemento de la superficie de la caja estará tres veces más lejos de la carga $+q$, por lo que el campo eléctrico será $(\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{9}$ de la intensidad. Pero el área de la caja se incrementará en un factor de $3^2 = 9$. De ahí que el flujo eléctrico será multiplicado por un factor de $(\frac{1}{9})(9) = 1$. En otras palabras, el flujo no cambiará.
22.2 Respuestas: iv), ii), i), iii) En cada caso, el campo eléctrico es uniforme, por lo que el flujo es $\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A}$. Se usan las relaciones para los productos escalares de vectores unitarios: $\hat{\imath} \cdot \hat{\imath} = \hat{\jmath} \cdot \hat{\jmath} = 1$, $\hat{\imath} \cdot \hat{\jmath} = 0$. En el caso i) se tiene $\Phi_E = (4.0 \text{ N/C})(6.0 \text{ m}^2)\hat{\imath} \cdot \hat{\jmath} = 0$ (el campo eléctrico y el vector de área son perpendiculares, por lo que hay un flujo nulo). En el caso ii) se tiene $\Phi_E [(4.0 \text{ N/C})\hat{\imath} + (2.0 \text{ N/C})\hat{\jmath}] \cdot (3.0 \text{ m}^2)\hat{\jmath} = (2.0 \text{ N/C}) \cdot (3.0 \text{ m}^2) = 6.0 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$. De manera similar, en el caso iii) se tiene $\Phi_E = [(4.0 \text{ N/C})\hat{\imath} - (2.0 \text{ N/C})\hat{\jmath}] \cdot [(3.0 \text{ m}^2)\hat{\imath} + (7.0 \text{ m}^2)\hat{\jmath}] = (4.0 \text{ N/C})(3.0 \text{ m}^2) - (2.0 \text{ N/C})(7.0 \text{ m}^2) = -2 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$, y en el caso iv) se tiene $\Phi_E = [(4.0 \text{ N/C})\hat{\imath} - (2.0 \text{ N/C})\hat{\jmath}] \cdot [(3.0 \text{ m}^2)\hat{\imath} - (7.0 \text{ m}^2)\hat{\jmath}] = (4.0 \text{ N/C})(3.0 \text{ m}^2) + (2.0 \text{ N/C}) \cdot (7.0 \text{ m}^2) = 26 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$.
22.3 Respuestas: S_2, S_5, S_4; S_1 y S_3 (empate) La ley de Gauss afirma que el flujo a través de una superficie cerrada es proporcional a la cantidad de carga encerrada dentro de esa superficie, por lo que ordenar estas superficies según sus flujos es lo mismo que hacerlo según la cantidad de carga que encierran. La superficie S_1 no encierra carga, la superficie S_2 encierra $9.0\ \mu\text{C} + 5.0\ \mu\text{C} + (-7.0\ \mu\text{C}) = 7.0\ \mu\text{C}$, la superficie S_3 encierra $9.0\ \mu\text{C} + 1.0\ \mu\text{C} + (-10.0\ \mu\text{C}) = 0$, la superficie S_4 encierra $8.0\ \mu\text{C} + (-7.0\ \mu\text{C}) = 1.0\ \mu\text{C}$, y la superficie S_5 encierra $8.0\ \mu\text{C} + (-7.0\ \mu\text{C}) + (-10.0\ \mu\text{C}) + (1.0\ \mu\text{C}) + (9.0\ \mu\text{C}) + (5.0\ \mu\text{C}) = 6.0\ \mu\text{C}$.
22.4 Respuesta: no Tal vez usted estuviera tentado a dibujar una superficie gaussiana que fuera una versión grande del conductor, con la misma forma y colocada de manera que lo encerrara por completo. Si bien se conoce el flujo a través de esta superficie gaussiana (según la ley de Gauss, es $\Phi_E = Q/\epsilon_0$), la dirección del campo eléctrico no necesita ser perpendicular a la superficie y tampoco es necesario que la magnitud del campo sea la misma en todos los puntos de la superficie. No es posible realizar la integral de flujo $\oint E_\perp\, dA$, por lo que no se puede calcular el campo eléctrico. La ley de Gauss es útil para obtener el campo eléctrico sólo cuando la distribución de la carga es *muy* simétrica.
22.5 Respuesta: no Antes de conectar el alambre con la esfera, la presencia de la carga puntual induciría una carga $-q$ en la superficie interior de la esfera hueca y una carga q en la superficie exterior (la carga neta en la esfera es igual a cero). Habrá un campo eléctrico fuera de la esfera que se debe a la carga en la superficie exterior. Sin embargo, una vez que el alambre conductor toque la esfera, los electrones fluirán de la tierra a la superficie exterior de la esfera para neutralizar la carga ahí presente (véase la figura 21.7c). Como resultado, la esfera no tendrá carga en su superficie externa, ni tampoco campo eléctrico en el exterior.

PROBLEMAS

Para las tareas asignadas por el profesor, visite **www.masteringphysics.com**



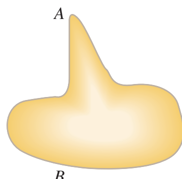
Preguntas para análisis

P22.1. Un globo de caucho tiene en su interior una carga puntual. ¿El flujo eléctrico a través del globo depende de si está inflado por completo o no? Explique su razonamiento.
P22.2. Suponga que en la figura 22.15 las dos cargas son positivas. ¿Cuáles serían los flujos a través de cada una de las cuatro superficies del ejemplo?
P22.3. En la figura 22.15, suponga que se coloca una tercera carga puntual fuera de la superficie gaussiana de color púrpura C. ¿Afectaría esto el flujo eléctrico a través de cualquiera de las superficies A, B, C o D en la figura? ¿Por qué?
P22.4. Cierta región del espacio limitada por una superficie imaginaria cerrada no contiene carga. ¿El campo eléctrico siempre es igual a cero en todos los puntos de la superficie? Si no es así, ¿en qué circunstancias sería cero en la superficie?
P22.5. Una superficie gaussiana esférica encierra una carga puntual q. Si la carga puntual se desplaza del centro de la esfera a un punto alejado de ahí, ¿cambia el campo eléctrico en un punto de la superficie? ¿Cambia el flujo total a través de la superficie gaussiana? Explique su respuesta.
P22.6. Usted encuentra una caja cerrada ante su puerta. Sospecha que contiene varias esferas de metal con carga y empacadas en un material aislante. ¿Cómo podría determinar la carga neta total dentro de la caja sin abrirla? ¿O no es posible hacer eso?
P22.7. Durante el flujo de una corriente eléctrica en un alambre conductor, uno o más electrones de cada átomo tienen libertad para moverse a lo largo del alambre, en forma parecida a como el agua fluye por un tubo. ¿Esperaría encontrar un campo eléctrico fuera de un alambre que condujera ese flujo tan estable de electrones? Explique su respuesta.
P22.8. Si el campo eléctrico de una carga puntual fuera proporcional a $1/r^3$ en vez de $1/r^2$, ¿seguiría siendo válida la ley de Gauss? Explique su razonamiento. (*Sugerencia:* considere una superficie gaussiana esférica centrada en una sola carga puntual.)
P22.9. Suponga que el disco del ejemplo 22.1 (sección 22.2), en vez de tener su vector normal orientado a sólo dos o tres ángulos particulares con respecto al campo eléctrico, comenzara a girar continuamente de manera que su vector normal primero fuera paralelo al campo, luego perpendicular y después opuesto a él, y así sucesivamente. Construya una gráfica del flujo eléctrico resultante contra el tiempo, para una rotación completa de 360°.
P22.10. En un conductor, uno o más electrones de cada átomo tienen libertad para moverse por todo el volumen del conductor. ¿Contradice esto el enunciado de que cualquier carga en exceso en un conductor sólido debe permanecer en su superficie? ¿Por qué?

P22.11. Usted carga el generador Van de Graaff que se muestra en la figura 22.27, y luego le acerca una esfera conductora hueca idéntica, pero sin carga y sin dejar que las dos esferas se toquen. Elabore un diagrama de la distribución de cargas en la segunda esfera. ¿Cuál es el flujo neto a través de la segunda esfera? ¿Cuál es el campo eléctrico dentro de la segunda esfera?

P22.12. La magnitud de $\vec{E}$ en la superficie de un sólido conductor de forma irregular debe ser máxima en las regiones en las que hay formas agudas, como el punto *A* de la figura 22.30, y debe ser mínima en las regiones planas, como el punto *B* de la misma figura. Explique por qué debe ser así considerando la manera en que las líneas de campo eléctrico deben acomodarse cerca de una superficie conductora. ¿Cómo cambia la densidad superficial de carga en los puntos *A* y *B*? Explique su respuesta.

Figura 22.30 Pregunta P22.12.



P22.13. Un pararrayos es una varilla de cobre redondeada que se monta en la parte alta de los edificios y va soldada a un cable grueso, también de cobre, que llega al suelo. Los pararrayos se utilizan para proteger casas y graneros de los relámpagos; la corriente de los relámpagos corre por el cable y no por el edificio. ¿Por qué? ¿Por qué el extremo de la varilla debe estar redondeado? (*Sugerencia:* la respuesta a la pregunta para análisis P22.12 le resultará de ayuda.)

P22.14. Un conductor sólido tiene una cavidad en su interior. ¿Afectaría la presencia de una carga puntual dentro de la cavidad al campo eléctrico fuera del conductor? ¿Por qué? ¿La presencia de una carga puntual fuera del conductor afectaría el campo eléctrico en el interior de la cavidad? De nuevo, ¿por qué?

P22.15. Explique el siguiente enunciado: "en una situación estática el campo eléctrico en la superficie de un conductor podría no tener ninguna componente paralela a la superficie, ya que esto violaría la condición de que las cargas en la superficie están en reposo". ¿Este mismo enunciado sería válido para el campo eléctrico en la superficie de un *aislante*? Explique su respuesta y la razón de cualesquiera diferencias entre los casos de un conductor y un aislante.

P22.16. Una esfera sólida de cobre tiene una carga neta positiva distribuida de manera uniforme sobre la superficie de la esfera; el campo eléctrico en el interior de la esfera es igual a cero. Después, una carga puntual negativa fuera de la esfera se acerca a la superficie de la esfera. ¿Toda la carga neta en la esfera seguirá en la superficie? De ser así, ¿se distribuiría de manera uniforme? Y si no fuera uniforme, ¿cómo se distribuiría? ¿El campo eléctrico dentro de la esfera seguiría siendo igual a cero? Explique su respuesta para cada caso.

P22.17. Algunos aviones modernos están hechos principalmente de materiales compuestos que no conducen la electricidad. La U.S. Federal Aviation Administration requiere que tales aviones tengan conductores bajo sus superficies para que los protejan cuando vuelen en medio de tormentas. Explique la física que sustenta este requerimiento.

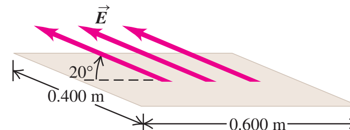
Ejercicios

Sección 22.2 Cálculo del flujo eléctrico

22.1. Una delgada hoja de papel tiene un área de 0.250 m^2 y está orientada de tal modo que la normal a la hoja forma un ángulo de 60° con un campo eléctrico uniforme de magnitud 14 N/C. *a*) Calcule la magnitud del flujo eléctrico a través de la hoja. *b*) ¿La respuesta al inciso *a*) depende de la forma de la hoja? ¿Por qué? *c*) Para qué ángulo ϕ entre la normal a la hoja y el campo eléctrico, la magnitud del flujo a través de la hoja es: i) máxima y ii) mínima? Explique sus respuestas.

22.2. Una lámina plana tiene forma rectangular con lados de longitud 0.400 m y 0.600 m. La lámina está inmersa en un campo eléctrico uniforme de magnitud 75.0 N/C dirigido a 20° con respecto al plano de la lámina (figura 22.31). Encuentre la magnitud del flujo eléctrico a través de la lámina.

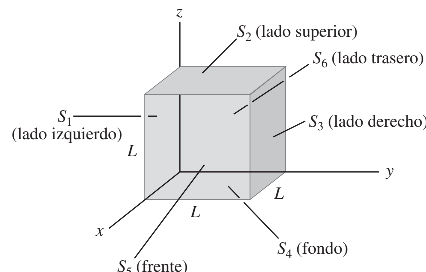
Figura 22.31 Ejercicio 22.2.



22.3. Se mide un campo eléctrico de 1.25×10^6 N/C a una distancia de 0.150 m de una carga puntual. *a*) ¿Cuál es el flujo eléctrico a través de una esfera a esas distancia de la carga? *b*) ¿Cuál es la magnitud de la carga?

22.4. Un cubo tiene lados con longitud $L = 0.300$ m. Se coloca con una esquina en el origen, como se muestra en la figura 22.32. El campo eléctrico no es uniforme, pero está dado por $\vec{E} = (-5.00\ \text{N/C} \cdot \text{m})x\hat{\imath} + (3.00\ \text{N/C} \cdot \text{m})z\hat{k}$. *a*) Calcule el flujo eléctrico a través de cada una de las seis caras del cubo, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 y S_6. *b*) Determine cuál es la carga eléctrica total dentro del cubo.

Figura 22.32 Ejercicios 22.4 y 22.6; Problema 22.32.



22.5. Una superficie hemisférica con radio *r* en una región de campo eléctrico uniforme $\vec{E}$ tiene su eje alineado en forma paralela con la dirección del campo. Calcule el flujo a través de la superficie.

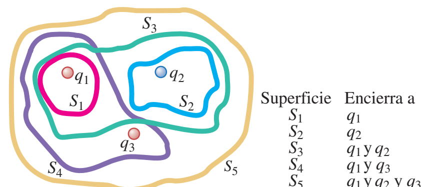
22.6. El cubo de la figura 22.32 tiene lados con longitud $L = 10.0$ cm. El campo eléctrico es uniforme, tiene magnitud $E = 4.00 \times 10^3$ N/C y es paralelo al plano *xy* con un ángulo de 36.9° medido a partir del eje $+x$ hacia el eje $+y$. *a*) ¿Cuál es el flujo eléctrico a través de cada una de las seis caras del cubo, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 y S_6? *b*) ¿Cuál es el flujo eléctrico total a través de todas las caras del cubo?

22.7. En el ejemplo 21.11 (sección 21.5) se demostró que el campo eléctrico debido a una línea infinita de carga es perpendicular a ésta y su magnitud es $E = \lambda/2\pi\epsilon_0 r$. Considere un cilindro imaginario con radio $r = 0.250$ m y longitud $l = 0.400$ m que tiene una línea infinita de carga positiva que va a lo largo de su eje. La carga por unidad de longitud en la línea es $\lambda = 6.00\ \mu\text{C/m}$. *a*) ¿Cuál es el flujo eléctrico a través del cilindro debido a esta línea infinita de carga? *b*) ¿Cuál es el flujo a través del cilindro si su radio se incrementa a $r = 0.500$ m? *c*) ¿Cuál es el flujo a través del cilindro si su longitud aumenta a $l = 0.800$ m?

Sección 22.3 Ley de Gauss

22.8. Las tres esferas pequeñas que se muestran en la figura 22.33 tienen cargas $q_1 = 4.00$ nC, $q_2 = -7.80$ nC y $q_3 = 2.40$ nC. Calcule el flujo eléctrico neto a través de cada una de las siguientes superficies cerradas que se ilustran en sección transversal en la figura: *a*) S_1; *b*) S_2; *c*) S_3; *d*) S_4; *e*) S_5. *f*) Las respuestas para los incisos *a*) a *e*), ¿dependen de la manera en que está distribuida la carga en cada esfera pequeña? ¿Por qué?

Figura 22.33 Ejercicio 22.8.



22.9. Se rocía una capa muy delgada y uniforme de pintura con carga sobre la superficie de una esfera de plástico cuyo diámetro es de 12.0 cm, para dar una carga de $-15.0\ \mu$C. Encuentre el campo eléctrico *a*) apenas dentro de la capa de pintura; *b*) inmediatamente afuera de la capa de pintura; *c*) 5.00 cm afuera de la superficie de la capa de pintura.

22.10. Una carga puntual $q_1 = 4.00$ nC se localiza sobre el eje x en $x = 2.00$ m, y una segunda carga puntual $q_2 = -6.00$ nC está en el eje y en $y = 1.00$ m. ¿Cuál es el flujo eléctrico total debido a estas dos cargas a través de una superficie esférica con centro en el origen y con radio de *a*) 0.500 m, *b*) 1.50 m, *c*) 2.50 m?

22.11. En cierta región del espacio, el campo eléctrico $\vec{E}$ es uniforme. *a*) Use la ley de Gauss para demostrar que esa región debe ser eléctricamente neutra; es decir, la densidad volumétrica de carga ρ debe ser igual a cero. *b*) Lo contrario, ¿es verdadero? Es decir, en una región del espacio donde no hay carga, ¿$\vec{E}$ debe ser uniforme? Explique su respuesta.

22.12. *a*) En cierta región del espacio, la densidad volumétrica de carga ρ tiene un valor positivo uniforme. En esa región, ¿$\vec{E}$ puede ser uniforme? Explique su respuesta. *b*) Suponga que en esa región de ρ positiva y uniforme hay una "burbuja" dentro de la cual $\rho = 0$. En el interior de la burbuja, ¿$\vec{E}$ puede ser uniforme? Explique.

22.13. Una carga puntual de $9.60\ \mu$C está en el centro de un cubo con lados cuya longitud mide 0.500 m. *a*) ¿Cuál es el flujo eléctrico a través de una de las seis caras del cubo? *b*) ¿Cómo cambiaría su respuesta al inciso *a*) si los lados midieran 0.250 m? Dé una explicación.

22.14. Campos eléctricos en un átomo. Los núcleos de los átomos grandes, como el del uranio, con 92 protones, se modelan como esferas simétricas de carga. El radio del núcleo de uranio mide aproximadamente 7.4×10^{-15} m. *a*) ¿Cuál es el campo eléctrico que produce este núcleo justo afuera de su superficie? *b*) ¿Qué magnitud de campo eléctrico produce a la distancia de los electrones, que es alrededor de 1.0×10^{-10} m? *c*) Los electrones se modelan como si formaran una capa uniforme de carga negativa. ¿Qué campo eléctrico producen en el sitio en que se ubica el núcleo?

22.15. Una carga puntual de $+5.00\ \mu$C se localiza en el eje x en $x = 4.00$ m, cerca de una superficie esférica de radio 3.00 m con centro en el origen. *a*) Calcule la magnitud del campo eléctrico en $x = 3.00$ m. *b*) Determine la magnitud del campo eléctrico en $x = -3.00$ m. *c*) De acuerdo con la ley de Gauss, el flujo neto a través de la esfera es igual a cero porque no contiene carga. Pero el campo debido a la carga exterior es mucho más fuerte en el lado cercano a la esfera (por ejemplo, en $x = 3.00$ m) que en el lado alejado (en $x = -3.00$ m). Entonces, ¿cómo puede ser igual el flujo hacia la esfera (en el lado cercano) que el flujo hacia fuera de ella (en el lado lejano)? Dé una explicación; un diagrama será de utilidad.

Sección 22.4 Aplicaciones de la ley de Gauss y Sección 22.5 Cargas en conductores

22.16. Una esfera metálica sólida con radio de 0.450 m tiene una carga neta de 0.250 nC. Determine la magnitud del campo eléctrico *a*) en un punto a 0.100 m fuera de la superficie, y *b*) en un punto dentro de la esfera, a 0.100 m bajo la superficie.

22.17. En un día húmedo, basta un campo eléctrico de 2.00×10^4 N/C para producir chispas de una pulgada de largo. Suponga que en su clase de física un generador Van de Graaff (véase la figura 22.27), con una esfera de radio de 15.0 cm, está produciendo chispas de 6 pulgadas de largo. *a*) Use la ley de Gauss para calcular la cantidad de carga almacenada en la superficie de la esfera antes de que usted, con valentía, la descargue con su mano. *b*) Suponga que toda la carga se localiza en el centro de la esfera, y utilice la ley de Coulomb para calcular el campo eléctrico en la superficie de la esfera.

22.18. Algunos astrónomos han sugerido que Marte tiene un campo eléctrico parecido al de la Tierra y que se produce un flujo eléctrico neto de $3.63 \times 10^{16}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$ en la superficie de Marte. Calcule *a*) la carga eléctrica total sobre el planeta; *b*) el campo eléctrico en la superficie del planeta (consulte los datos astronómicos en la tercera de forros); *c*) la densidad de carga en Marte si se supone que toda la carga se distribuye de manera uniforme en su superficie.

22.19. ¿Cuántos electrones excedentes deben agregarse a un conductor esférico aislado de 32.0 cm de diámetro para producir un campo eléctrico de 1150 N/C apenas fuera de su superficie?

22.20. El campo eléctrico a 0.400 m de una línea uniforme y muy larga de carga es de 840 N/C. ¿Cuánta carga está contenida en una sección de 2.00 cm de la línea?

22.21. Una línea uniforme y muy larga de carga tiene 4.80 μC/m por unidad de longitud y se ubica a lo largo del eje x. Una segunda línea uniforme de carga tiene una carga por unidad de longitud de -2.40 μC/m y está situada paralela al eje x en $y = 0.400$ m. ¿Cuál es el campo eléctrico neto (magnitud y dirección) en los siguientes puntos sobre el eje y: *a*) $y = 0.200$ m y *b*) $y = 0.600$ m?

22.22. *a*) A una distancia de 0.200 cm del centro de una esfera conductora con carga y radio de 0.100 cm, el campo eléctrico es de 480 N/C. ¿Cuál es el campo eléctrico a 0.600 cm del centro de la esfera? *b*) A una distancia de 0.200 cm del eje de un cilindro conductor muy largo con radio de 0.100 cm, el campo eléctrico es de 480 N/C. ¿Cuál es el campo eléctrico a 0.600 cm del eje del cilindro? *c*) A una distancia de 0.200 cm de una lámina grande con carga uniforme, el campo eléctrico es de 480 N/C. ¿Cuál es el campo eléctrico a 1.20 cm de la lámina?

22.23. Una esfera hueca, conductora, con radio exterior de 0.250 m y radio interior de 0.200 m tiene una densidad superficial de carga de $+6.37 \times 10^{-6}\ \text{C/m}^2$. Se introduce una carga de $-0.500\ \mu$C en la cavidad interna de la esfera. *a*) ¿Cuál es la nueva densidad de carga apenas afuera de la esfera? *b*) Calcule la intensidad del campo eléctrico justo fuera de la esfera. *c*) ¿Cuál es el flujo eléctrico a través de una superficie esférica apenas dentro de la superficie interior de la esfera?

22.24. Una carga puntual de $-2.00\ \mu$C se localiza en el centro de una cavidad esférica de radio 6.50 cm dentro de un sólido aislante con carga. La densidad de carga en el sólido es de $\rho = 7.35 \times 10^{-4}\ \text{C/m}^3$. Calcule el campo eléctrico dentro del sólido a una distancia de 9.50 cm del centro de la cavidad.

22.25. El campo eléctrico a una distancia de 0.145 m de la superficie de una esfera sólida aislante con radio de 0.355 m, es de 1750 N/C. *a*) Suponiendo que la carga de la esfera se distribuye con uniformidad, ¿cuál es la densidad de carga en su interior? *b*) Calcule el campo eléctrico dentro de la esfera a una distancia de 0.200 m del centro.

22.26. Un conductor con una cavidad interna, como el que se ilustra en la figura 22.23c, tiene una carga total de $+5.00$ nC. La carga dentro de la cavidad, aislada del conductor, es de -6.00 nC. ¿Cuánta carga hay en *a*) la superficie interior del conductor, y *b*) la superficie exterior del conductor?

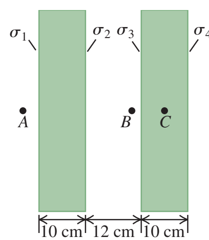
22.27. Aplique la ley de Gauss a las superficies gaussianas S_2, S_3 y S_4 en la figura 22.21b, para calcular el campo eléctrico entre las placas y fuera de ellas.

22.28. Una lámina aislante y cuadrada con lado de 80.0 cm se encuentra en posición horizontal. La lámina tiene una carga de 7.50 nC distribuida de manera uniforme sobre su superficie. *a*) Calcule el campo eléctrico en un punto localizado a 0.100 nm sobre el centro de la lámina. *b*) Estime el campo eléctrico en un punto a 100 m sobre el centro de la lámina. *c*) ¿Serían diferentes las respuestas para los incisos *a*) y *b*) si la lámina estuviera hecha de un material conductor? ¿Por qué?

22.29. Un conductor cilíndrico de longitud infinita tiene un radio R y densidad superficial de carga uniforme σ. *a*) En términos de σ y R, ¿cuál es la carga por unidad de longitud λ para el cilindro? *b*) En términos de σ, ¿cuál es la magnitud del campo eléctrico producido por el cilindro con carga a una distancia $r > R$ de su eje? *c*) Exprese el resultado del inciso *b*) en términos de λ y demuestre que el campo eléctrico fuera del cilindro es el mismo que si toda la carga estuviera sobre el eje. Compare su resultado con el que se obtuvo para una línea de carga en el ejemplo 22.6 (sección 22.4).

22.30. Dos láminas de plástico no conductoras, muy grandes, cada una con espesor de 10.0 cm, tienen densidades de carga uniforme σ_1, σ_2, σ_3 y σ_4 en sus superficies, como se ilustra en la figura 22.34. Estas densidades de carga superficial tienen los valores $\sigma_1 = -6.00\ \mu C/m^2$, $\sigma_2 = +5.00\ \mu C/m^2$, $\sigma_3 = +2.00\ \mu C/m^2$ y $\sigma_4 = +4.00\ \mu C/m^2$. Use la ley de Gauss para encontrar la magnitud y dirección del campo eléctrico en los puntos siguientes, lejos de los bordes de las láminas: *a*) punto *A*, a 5.00 cm de la cara izquierda de la lámina de la izquierda; *b*) punto *B*, a 1.25 cm de la superficie interior de la lámina de la derecha; *c*) punto *C*, a la mitad de la lámina de la derecha.

Figura 22.34 Ejercicio 22.30.



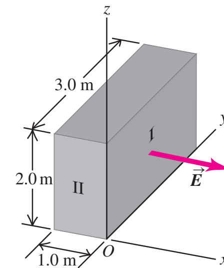
22.31. Una carga negativa $-Q$ se localiza dentro de la cavidad de un sólido metálico hueco. El exterior del sólido tiene contacto con la tierra por medio de la conexión de un alambre conductor. *a*) ¿Hay alguna carga excedente inducida sobre la superficie interior de la pieza de metal? Si así fuera, determine su signo y magnitud. *b*) ¿Hay algún exceso de carga sobre el exterior del elemento de metal? ¿Por qué? *c*) ¿Hay algún campo eléctrico en la cavidad? Explique. *d*) ¿Hay algún campo eléctrico dentro del metal? Explique por qué. *e*) Alguien situado fuera del sólido mediría un campo eléctrico debido a la carga $-Q$. ¿Es razonable decir que el conductor a tierra tiene *aislada* la región de los efectos de la carga $-Q$? En principio, ¿podría hacerse lo mismo para la gravedad? ¿Por qué?

Problemas

22.32. Un cubo tiene lados de longitud L. Está situado con una arista en el origen, como se ilustra en la figura 22.32. El campo eléctrico es uniforme y está dado por $\vec{E} = -B\hat{\imath} + C\hat{\jmath} - D\hat{k}$, donde B, C y D son constantes positivas. *a*) Determine el flujo eléctrico a través de cada una de las seis caras de los cubos S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 y S_6. *b*) Calcule el flujo eléctrico a través de todo el cubo.

22.33. El campo eléctrico $\vec{E}$ en la figura 22.35 es paralelo en todo lugar al eje x, por lo que las componentes E_y y E_z son iguales a cero. La componente x del campo E_x depende de x, pero no de y ni de z. En los puntos del plano yz (donde $x = 0$), $E_x = 125$ N/C. *a*) ¿Cuál es el flujo eléctrico a través de la superficie I en la figura 22.35? *b*) ¿Cuál es el flujo eléctrico a través de la superficie II? *c*) El volumen que se ilustra en la figura es una pequeña sección de un bloque muy grande aislante de 1.0 m de espesor. Si dentro de ese volumen hay una carga total de -24.0 nC, ¿cuáles son la magnitud y dirección de $\vec{E}$ en la cara opuesta a la superficie I? *d*) El campo eléctrico, ¿es producido sólo por cargas dentro del bloque, o también se debe a cargas fuera del bloque? ¿Cómo saberlo?

Figura 22.35 Problema 22.33.



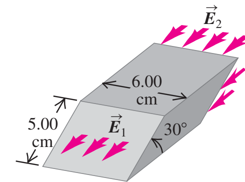
22.34. Una superficie cuadrada y plana, con lados de longitud L, está descrita por las ecuaciones

$$x = L \qquad (0 \leq y \leq L, 0 \leq z \leq L)$$

a) Dibuje este cuadrado y muestre los ejes x, y y z. *b*) Calcule el flujo eléctrico a través del cuadrado debido a una carga puntual positiva q localizada en el origen ($x = 0$, $y = 0$, $z = 0$). (*Sugerencia:* piense que el cuadrado forma parte de un cubo con centro en el origen.)

22.35. El campo eléctrico $\vec{E}_1$ en toda la cara de un paralelepípedo es uniforme y se dirige hacia fuera de la cara. En la cara opuesta, el campo eléctrico $\vec{E}_2$ también es uniforme en toda ella y se dirige hacia esa cara (figura 22.36). Las dos caras en cuestión están inclinadas 30.0° con respecto de la horizontal, en tanto que $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ son horizontales; $\vec{E}_1$ tiene una magnitud de 2.50×10^4 N/C, y $\vec{E}_2$ tiene una magnitud de 7.00×10^4 N/C. *a*) Suponiendo que ninguna otra línea de campo eléctrico cruza las superficies del paralelepípedo, determine la carga neta contenida dentro. *b*) ¿El campo eléctrico sólo es producido por las cargas en el interior del paralelepípedo o también se debe a las que están fuera de éste? ¿Cómo podría saberse?

Figura 22.36 Problema 22.35.



22.36. Una línea larga tiene una densidad lineal de carga uniforme de $+50.0\ \mu C/m$ que corre paralela y a 10.0 cm de la superficie de una lámina de plástico plana y grande que tiene una densidad superficial de carga uniforme de $-100\ \mu C/m^2$ en un lado. Encuentre la ubicación de todos los puntos en los que una partícula α no recibiría ninguna fuerza debido a este arreglo de objetos con carga.

22.37. Cable coaxial. Un cable coaxial largo consiste en un conductor cilíndrico interior con radio a, y un cilindro exterior con radio interior b y radio exterior c. El cilindro exterior está montado en apoyos aislantes y no tiene carga neta. El cilindro interior tiene carga positiva uniforme por unidad de longitud λ. Calcule el campo eléctrico *a*) en cualquier punto entre los cilindros a una distancia r del eje, y *b*) en cualquier punto fuera del cilindro exterior. *c*) Elabore una gráfica de la magnitud del campo eléctrico como función de la distancia r desde el eje del cable, de $r = 0$ a $r = 2c$. *d*) Determine la carga por unidad de longitud en las superficies interna y externa del cilindro exterior.

22.38. Un tubo conductor muy largo (un cilindro hueco) tiene radio interior a y radio exterior b. Conduce una carga por unidad de longitud $+\alpha$, donde α es una constante positiva con unidades de C/m. Sobre el

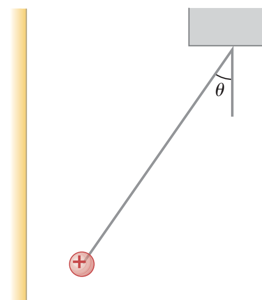
eje del tubo se encuentra una línea de carga, con carga por unidad de longitud de $+\alpha$. *a*) Calcule el campo eléctrico en términos de α y la distancia r desde el eje del tubo para i) $r < a$; ii) $a < r < b$; iii) $r > b$. Muestre en una gráfica los resultados de E como función de r. *b*) ¿Cuál es la carga por unidad de longitud sobre i) la superficie interior del tubo, y ii) la superficie exterior del tubo?

22.39. Repita el problema 22.38, sólo que ahora el tubo conductor tiene una carga por unidad de longitud de $-\alpha$. Igual que en el problema 22.38, la línea de carga tiene $+\alpha$ como carga por unidad de longitud.

22.40. Un cilindro sólido y muy largo, con radio R, tiene carga positiva distribuida de manera uniforme, con carga por unidad de volumen de ρ. *a*) Obtenga la expresión para el campo eléctrico dentro del volumen a una distancia r del eje del cilindro en términos de la densidad de carga ρ. *b*) ¿Cuál es el campo eléctrico en un punto afuera del volumen en términos de la carga por unidad de longitud λ en el cilindro? *c*) Compare las respuestas a los incisos *a*) y *b*) para $r = R$. *d*) Elabore una gráfica de la magnitud del campo eléctrico como función de r, de $r = 0$ a $r = 3R$.

22.41. Una esfera pequeña con masa de 0.002 g tiene una carga de 5.00×10^{-8} C y cuelga de un cordel cerca de una lámina muy grande, conductora y con carga positiva, como se ilustra en la figura 22.37. La densidad de carga en la lámina es de 2.50×10^{-9} C/m^2. Encuentre el ángulo que forma el cordel.

Figura 22.37 Problema 22.41.

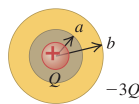


22.42. Esfera dentro de otra esfera. Una esfera sólida conductora tiene una carga q y radio a. Se encuentra dentro de una esfera hueca concéntrica, con radio interior b y radio exterior c. La esfera hueca no tiene carga neta. *a*) Obtenga expresiones para la magnitud del campo eléctrico en términos de la distancia r desde el centro para las regiones $r < a$, $a < r < b$, $b < r < c$ y $r > c$. *b*) Elabore la gráfica de la magnitud del campo eléctrico como función de r, de $r = 0$ a $r = 2c$. *c*) ¿Cuál es la carga en la superficie interior de la esfera hueca? *d*) ¿Y en la superficie exterior? *e*) Represente la carga de la esfera pequeña mediante cuatro signos positivos. Elabore un diagrama de las líneas de campo del sistema dentro de un volumen esférico de radio $2c$.

22.43. Una esfera sólida conductora con radio R que tiene carga positiva Q es concéntrica con una coraza aislante muy delgada de radio $2R$ que también tiene una carga Q. La carga Q está distribuida de manera uniforme en la coraza aislante. *a*) Encuentre el campo eléctrico (magnitud y dirección) en cada una de las regiones $0 < r < R$, $R < r < 2R$ y $r > 2R$. *b*) Elabore la gráfica de la magnitud del campo eléctrico como función de r.

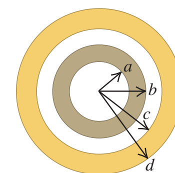
22.44. Una coraza esférica conductora, con radio interior a y radio exterior b, tiene una carga puntual positiva Q localizada en su centro. La carga total en la coraza es $-3Q$, y está aislada de su ambiente (figura 22.38). *a*) Obtenga expresiones para la magnitud del campo eléctrico, en términos de la distancia r desde el centro, para las regiones $r < a$, $a < r < b$ y $r > b$. *b*) ¿Cuál es la densidad superficial de carga en la superficie interior de la coraza conductora? *c*) ¿Cuál es la densidad superficial de carga en la superficie exterior de la coraza conductora? *d*) Elabore un diagrama de las líneas de campo y la localización de todas las cargas. *e*) Grafique la magnitud del campo eléctrico como función de r.

Figura 22.38 Problema 22.44.



22.45. Corazas esféricas concéntricas. Una coraza esférica conductora pequeña con radio interior a y radio exterior b es concéntrica respecto a otra coraza conductora esférica más grande cuyo radio interior es c y radio exterior d (figura 22.39). La coraza interior tiene una carga total $+2q$, y la exterior tiene carga de $+4q$. *a*) Calcule el campo eléctrico (magnitud y dirección) en términos de q y la distancia r a partir del centro común de las dos corazas para i) $r < a$; ii) $a < r < b$; iii) $b < r < c$; iv) $c < r < d$; v) $r > d$. Muestre sus resultados en una gráfica de la componente radial de $\vec{E}$ como función de r. *b*) ¿Cuál es la carga total en i) la superficie interior de la coraza pequeña; ii) la superficie exterior de la coraza pequeña; iii) la superficie interior de la coraza grande; iv) la superficie exterior de la coraza grande?

Figura 22.39 Problema 22.45.



22.46. Repita el problema 22.45, pero ahora considere que la coraza exterior tiene carga $-2q$. Como en el problema 22.45, la coraza interior tiene carga $+2q$.

22.47. Repita el problema 22.45, pero ahora considere que la coraza externa tiene carga $-4q$. Igual que en el problema 22.45, la coraza interior tiene carga $+2q$.

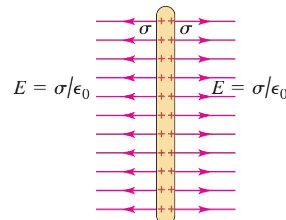
22.48. Una esfera conductora sólida con radio R tiene una carga total positiva Q. La esfera está rodeada por una coraza aislante con radio interior R y radio exterior $2R$. La coraza aislante tiene una densidad de carga uniforme ρ. *a*) Encuentre el valor de ρ de manera que la carga neta de todo el sistema sea igual a cero. *b*) Si ρ tiene el valor obtenido en el inciso *a*), calcule el campo eléctrico (magnitud y dirección) en cada una de las regiones $0 < r < R$, $R < r < 2R$ y $r > 2R$. Presente sus resultados en una gráfica de la componente radial de $\vec{E}$ como función de r. *c*) Como regla general, el campo eléctrico es discontinuo sólo en lugares en que hay una lámina delgada de carga. Explique el modo en que concuerdan con esta regla sus resultados para el inciso *b*).

22.49. Sobre la superficie de una coraza esférica aislante de radio R, está distribuida con uniformidad una carga negativa $-Q$. Calcule la fuerza (magnitud y dirección) que ejerce la coraza sobre una carga puntual positiva q ubicada a una distancia *a*) $r > R$ del centro de la coraza (fuera de la coraza), y *b*) $r < R$ del centro de la coraza (dentro de la coraza).

22.50. *a*) ¿Cuántos electrones en exceso deben distribuirse de manera uniforme dentro del volumen de una esfera de plástico aislada de 30.0 cm de diámetro, para producir un campo eléctrico de 1150 N/C justo afuera de la superficie? *b*) ¿Cuál es el campo eléctrico en un punto que está 10.0 cm fuera de la superficie de la esfera.

22.51. Una placa conductora grande y aislada (figura 22.40) tiene una carga por unidad de área σ sobre su superficie. Como la placa es conductora, el campo eléctrico en su superficie es perpendicular a la superficie y su magnitud es $E = \sigma/\epsilon_0$. *a*) En el ejemplo 22.7 (sección 22.4) se demostró que el campo generado por una lámina grande, con carga uniforme y con carga por unidad de área σ tiene una magnitud de $E = \sigma/2\epsilon_0$, exactamente la *mitad* de una placa conductora con carga. ¿Por qué hay esta diferencia? *b*) Recuerde que la distribución de carga en la placa conductora es como si hubiera dos láminas de carga (una en cada superficie), cada una con carga por unidad de área de σ ; use el resultado del ejemplo 22.7 y el principio de superposición para demostrar que $E = 0$ dentro de la placa, y que $E = \sigma/\epsilon_0$ fuera de la placa.

Figura 22.40 Problema 22.51.

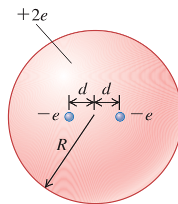


22.52. Modelo atómico de Thomson. En los primeros años del siglo XX, un modelo líder de la estructura del átomo era el del físico inglés J. J. Thomson (el descubridor del electrón). En el modelo de Thomson, un átomo consistía en una esfera de material con carga positiva en el que estaban inmersos electrones con carga negativa, como

chispas de chocolate en una bola de masa de galleta. Tome en cuenta que un átomo así consistía en un electrón con masa m y carga $-e$, que puede considerarse una carga puntual, y una esfera con carga uniforme de carga $+e$ y radio R. *a*) Explique por qué la posición de equilibrio del electrón está en el centro del núcleo. *b*) En el modelo de Thomson se suponía que el material positivo ofrecía poca o ninguna resistencia al movimiento del electrón. Si el electrón se aparta del equilibrio una distancia menor que R, demuestre que el movimiento resultante del electrón sería armónico simple, y calcule su frecuencia de oscilación. (*Sugerencia:* repase la definición del movimiento armónico simple en la sección 13.2. Si puede demostrarse que la fuerza neta sobre el electrón es de esta forma, entonces se infiere que el movimiento es armónico simple. A la inversa, si la fuerza neta sobre el electrón no tiene esta forma, el movimiento no es armónico simple. *c*) En la época de Thomson se sabía que los átomos excitados emitían ondas de luz sólo de ciertas frecuencias. En su modelo, la frecuencia de la luz emitida es la misma que la frecuencia de oscilación del electrón o electrones en el átomo. En el modelo de Thomson, ¿cuál tendría que ser el radio de un átomo para que produjera luz roja de frecuencia 4.57×10^{14} Hz? Compare su respuesta con los radios de átomos reales, que son del orden de 10^{-10} m (consulte el apéndice F para datos sobre el electrón). *d*) Si el electrón se desplazara del equilibrio una distancia mayor que R, ¿oscilaría? ¿Este movimiento sería armónico simple? Explique su razonamiento. (*Nota histórica:* en 1910 se descubrió el núcleo atómico, lo que probó que el modelo de Thomson era incorrecto. La carga positiva de un átomo no estaba distribuida en su volumen, como suponía Thomson, sino que se concentraba en el diminuto núcleo de radio de 10^{-14} a 10^{-15} m.)

22.53. Modelo atómico de Thomson (continúa). Utilizando el modelo de Thomson (actualmente caduco) que se describió en el problema 22.52, considere un átomo que consiste en dos electrones, cada uno con carga $-e$, inmersos en una esfera de carga $+2e$ y radio R. En el equilibrio, cada electrón está a una distancia d del centro del átomo (figura 22.41). Calcule la distancia d en términos de las demás propiedades del átomo.

Figura 22.41 Problema 22.53.



22.54. Bloque con carga uniforme. Un bloque de material aislante tiene un espesor $2d$ y está orientado de forma que sus caras quedan paralelas al plano yz y dado por los planos $x = d$ y $x = -d$. Las dimensiones y y z del bloque son muy grandes en comparación con d y pueden considerarse esencialmente infinitas. El bloque tiene una densidad de carga positiva uniforme ρ. a) Explique por qué el campo eléctrico debido al bloque es igual a cero en el centro del bloque ($x = 0$). *b*) Con base en la ley de Gauss, encuentre el campo eléctrico debido al bloque (magnitud y dirección) en todos los puntos del espacio.

22.55. Bloque con carga no uniforme. Repita el problema 22.54, pero ahora la densidad de carga del bloque está dada por $\rho(x) = \rho_0(x/d)^2$, donde ρ_0 es una constante positiva.

22.56. ¿Las fuerzas eléctricas solas dan un equilibrio estable? En el capítulo 21 se dieron varios ejemplos de cálculo de la fuerza que ejercían varias cargas puntuales del ambiente sobre una carga puntual en las cercanías. *a*) Considere una carga puntual positiva $+q$. Dé un ejemplo de cómo se colocarían otras dos cargas puntuales de su elección, de manera que la fuerza neta sobre la carga $+q$ fuera igual a cero. *b*) Si la fuerza neta sobre la carga $+q$ es igual a cero, entonces esa carga está en equilibrio. El equilibrio será *estable* si cuando la carga $+q$ se desplaza suavemente en *cualquier* dirección desde su posición de equilibrio, la fuerza neta sobre la carga la regresa a la posición de equilibrio. Para que éste sea el caso, ¿cuál debe ser la dirección del campo eléctrico $\vec{E}$ debido a las otras cargas en puntos que rodean la posición de equilibrio de $+q$? *c*) Imagine que la carga $+q$ se mueve muy lejos, y que hay una pequeña superficie gaussiana con centro en la posición en que $+q$ estaba en equilibrio. Aplicando la ley de Gauss a esta superficie, demuestre que es *imposible* satisfacer la condición para la estabilidad descrita en el inciso *b*). En otras palabras, una carga $+q$ no puede mantenerse en equilibrio estable sólo con fuerzas electrostáticas. Este resultado se conoce como *teorema de Earnshaw*. *d*) Los incisos *a*) a *c*) se refieren al equilibrio de una carga puntual positiva $+q$. Demuestre que el teorema de Earnshaw también se aplica a una carga puntual negativa $-q$.

22.57. Una distribución de carga no uniforme, pero con simetría esférica, tiene la densidad de carga $\rho(r)$ dada como sigue:

$$\rho(r) = \rho_0(1 - r/R) \quad \text{para } r \le R$$
$$\rho(r) = 0 \quad \text{para } r \ge R$$

donde $\rho_0 = 3Q/\pi R^3$ es una constante positiva. *a*) Demuestre que la carga total contenida en la distribución de carga es Q. *b*) Demuestre que el campo eléctrico en la región $r \ge R$ es idéntico al que produce una carga puntual Q en $r = 0$. *c*) Obtenga una expresión para el campo eléctrico en la región $r \le R$. *d*) Elabore la gráfica de la magnitud del campo eléctrico E como función de r. *e*) Encuentre el valor de r para el que el campo eléctrico es máximo, y calcule el valor de ese campo máximo.

22.58. Una distribución de carga no uniforme, pero con simetría esférica, tiene una densidad de carga $\rho(r)$ dada como sigue:

$$\rho(r) = \rho_0(1 - 4r/3R) \quad \text{para } r \le R$$
$$\rho(r) = 0 \quad \text{para } r \ge R$$

donde ρ_0 es una constante positiva. *a*) Encuentre la carga total contenida en la distribución de carga. *b*) Obtenga una expresión para el campo eléctrico en la región $r \ge R$. *c*) Obtenga una expresión para el campo eléctrico en la región $r \le R$. *d*) Elabore la gráfica de la magnitud del campo eléctrico E como función de r. *e*) Calcule el valor de r en el que el campo eléctrico es máximo, y obtenga el valor de este campo máximo.

22.59. La ley de Gauss de la gravitación. La fuerza gravitatoria entre dos masas puntuales separadas por una distancia r es proporcional a $1/r^2$, igual que la fuerza eléctrica entre dos cargas puntuales. A causa de esta similitud entre las interacciones gravitatorias y eléctricas, también hay una ley de Gauss para la gravitación. *a*) Sea $\vec{g}$ la aceleración debida a la gravedad ocasionada por una masa puntual m en la región, de manera que $\vec{g} = -(Gm/r^2)\hat{r}$. Considere una superficie gaussiana esférica con radio r centrada en esa masa puntual, y demuestre que el flujo de $\vec{g}$ a través de esta superficie está dado por

$$\oint \vec{g} \cdot d\vec{A} = -4\pi Gm$$

b) Con los mismos pasos lógicos que se siguieron en la sección 22.3 con la finalidad de obtener la ley de Gauss para el campo eléctrico, demuestre que el flujo de $\vec{g}$ a través de *cualquier* superficie cerrada está dado por

$$\oint \vec{g} \cdot d\vec{A} = -4\pi G M_{\text{enc}}$$

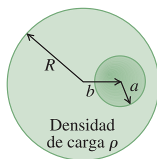
donde M_{enc} es la masa total encerrada por la superficie cerrada.

22.60. Aplicación de la ley de Gauss de la gravitación. Con base en la ley de Gauss para la gravitación [obtenida en el inciso *b*) del problema 22.59], demuestre que los siguientes enunciados son verdaderos: *a*) Para cualquier distribución de masa con simetría esférica con masa total M, la aceleración debida a la gravedad fuera de la distribución es la misma que si toda la masa estuviera concentrada en el centro. (*Sugerencia:* véase el ejemplo 22.5 en la sección 22.4.) *b*) En cualquier punto dentro de una coraza de masa simétricamente esférica, la aceleración debida a la gravedad es igual a cero. (*Sugerencia:* véase el ejemplo 22.5.) *c*) Si se pudiera perforar un agujero a través

de un planeta con simetría esférica respecto de su centro, y si la densidad fuera uniforme, se encontraría que la magnitud de $\vec{g}$ es directamente proporcional a la distancia r del centro. (*Sugerencia:* véase el ejemplo 22.9 en la sección 22.4.) En la sección 12.6 se probaron estos resultados mediante un análisis extenuante; las demostraciones con la ley de Gauss para la gravitación son *mucho* más fáciles.

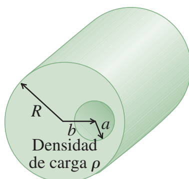
22.61. *a*) Una esfera aislante con radio a tiene una densidad de carga uniforme ρ. La esfera no está centrada en el origen, sino en $\vec{r} = \vec{b}$. Demuestre que el campo eléctrico en el interior de la esfera está dado por $\vec{E} = \rho(\vec{r} - \vec{b})/3\epsilon_0$. *b*) Una esfera aislante de radio R tiene un agujero esférico de radio a ubicado dentro de su volumen y con centro a una distancia b del centro de la esfera, donde $a < b < R$ (en la figura 22.42 se muestra una sección transversal de la esfera). La parte sólida de la esfera tiene una densidad volumétrica de carga uniforme ρ. Obtenga la magnitud y dirección del campo eléctrico $\vec{E}$ dentro del agujero, y demuestre que $\vec{E}$ es uniforme en todo el agujero. [*Sugerencia:* use el principio de superposición y el resultado del inciso *a*).]

Figura 22.42 Problema 22.61.



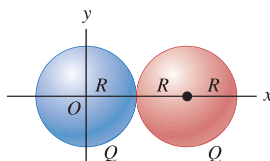
22.62. Un cilindro aislante sólido, muy largo, con radio R tiene un agujero cilíndrico con radio a perforado a lo largo de toda su longitud. El eje del agujero está a una distancia b del eje del cilindro, donde $a < b < R$ (figura 22.43). El material sólido del cilindro tiene densidad volumétrica de carga uniforme ρ. Encuentre la magnitud y dirección del campo eléctrico $\vec{E}$ dentro del agujero, y demuestre que $\vec{E}$ es uniforme en todo el agujero. (*Sugerencia:* véase el problema 22.61.)

Figura 22.43 Problema 22.62.



22.63. Una carga positiva Q está distribuida de manera uniforme sobre cada uno de dos volúmenes esféricos con radio R. Una esfera de carga está centrada en el origen, y la otra en $x = 2R$ (figura 22.44). Encuentre la magnitud y dirección del campo eléctrico neto debido a estas dos distribuciones de carga en los siguientes puntos sobre el eje x: *a*) $x = 0$; *b*) $x = R/2$; *c*) $x = R$; *d*) $x = 3R$.

Figura 22.44 Problema 22.63.



22.64. Repita el problema 22.63, pero ahora la esfera de la izquierda tiene carga positiva Q y la de la derecha carga negativa $-Q$.

22.65. Campo eléctrico dentro de un átomo de hidrógeno. Un átomo de hidrógeno está constituido por un protón de carga $+Q = -1.60 \times 10^{-19}$ C y un electrón de carga $-Q = -1.60 \times 10^{-19}$ C. El protón puede considerarse como una carga puntual en $r = 0$, el centro del átomo. El movimiento del electrón ocasiona que su carga se "disperse" hacia una distribución esférica alrededor del protón, por lo que el electrón es equivalente a una carga por unidad de volumen de

$$\rho(r) = -\frac{Q}{\pi a_0^3} e^{-2r/a_0}$$

donde $a_0 = 5.29 \times 10^{-11}$ m se llama *radio de Bohr*. *a*) Encuentre la cantidad total de la carga del átomo de hidrógeno encerrada dentro de una esfera con radio r centrado en el protón. Demuestre que cuando $r \to \infty$, la carga encerrada tiende a cero. Explique este resultado. *b*) Encuentre el campo eléctrico (magnitud y dirección) causado por la carga del átomo de hidrógeno como función de r. *c*) Grafique la magnitud del campo eléctrico E como función de r.

Problemas de desafío

22.66. Una región del espacio contiene una carga total positiva Q distribuida como esfera de manera que la densidad volumétrica de carga $\rho(r)$ está dada por

$$\rho(r) = \alpha \qquad \text{para } r \le R/2$$
$$\rho(r) = 2\alpha(1 - r/R) \qquad \text{para } R/2 \le r \le R$$
$$\rho(r) = 0 \qquad \text{para } r \ge R$$

Aquí α es una constante positiva que tiene unidades de C/m^3. *a*) Determine α en términos Q y R. *b*) Con base en la ley de Gauss, obtenga una expresión para la magnitud de $\vec{E}$ como función de r. Haga esto para las tres regiones por separado. Exprese sus respuestas en términos de la carga total Q. Asegúrese de comprobar que los resultados concuerden en las fronteras de las regiones. *c*) ¿Qué fracción de la carga total está contenida dentro de la región $r \le R/2$? *d*) Si un electrón con carga $q' = -e$ oscila de ida y vuelta alrededor de $r = 0$ (el centro de la distribución) con una amplitud menor que $R/2$, demuestre que el movimiento es armónico simple. (*Sugerencia:* repase el análisis del movimiento armónico simple en la sección 13.2. Si, y solo si, la fuerza neta sobre el electrón es proporcional a su desplazamiento del equilibrio, entonces el movimiento es armónico simple.) *e*) ¿Cuál es el periodo del movimiento en el inciso *d*)? *f*) Si la amplitud del movimiento descrito en el inciso *e*) es mayor que $R/2$, ¿el movimiento es armónico simple? ¿Por qué?

22.67. Una región en el espacio contiene una carga total positiva Q que está distribuida en forma esférica de manera que la densidad volumétrica de carga $\rho(r)$ está dada por

$$\rho(r) = 3\alpha r/(2R) \qquad \text{para } r \le R/2$$
$$\rho(r) = \alpha[1 - (r/R)^2] \qquad \text{para } R/2 \le r \le R$$
$$\rho(r) = 0 \qquad \text{para } r \ge R$$

Aquí, α es una constante positiva que tiene unidades de C/m^3. *a*) Determine α en términos de Q y R. *b*) Con base en la ley de Gauss, obtenga una expresión para la magnitud del campo eléctrico como función de r. Realice esto por separado para las tres regiones. Exprese sus respuestas en términos de la carga total Q. *c*) ¿Qué fracción de la carga total está contenida dentro de la región $R/2 \le r \le R$? *d*) ¿Cuál es la magnitud de $\vec{E}$ en $r = R/2$? *e*) Si un electrón con carga $q' = -e$ se libera desde el reposo en cualquier punto de alguna de las tres regiones, el movimiento resultante será oscilatorio pero no armónico simple. ¿Por qué? (Véase el problema de desafío 22.66.)